2.1

2. 在例5中证明 $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2$

证：由定理1，只需验证 $\mathcal{D}_1$ $\mathcal{D}_2$ 相容

$$\varphi_1\circ(\varphi_1^+)^{-1}=\varphi_1(\sqrt{a^2-y^2-z^2},y,z)=\left(\frac{a\sqrt{a^2-y^2-z^2}}{a+z},\frac{ay}{a+z}\right)\in C^\infty$$

$$\varphi_1^+\circ\varphi_1^{-1}=\varphi_1^+\left(\frac{2ua^2}{a^2+u^2+v^2},\frac{2va^2}{a^2+u^2+v^2},\frac{a(a^2-u^2-v^2)}{a^2+u^2+v^2}\right)$$

$$=\left(\frac{2va^2}{a^2+u^2+v^2},\frac{a(a^2-u^2-v^2)}{a^2+u^2+v^2}\right)\in C^\infty$$

$\Rightarrow$ (S_1,φ_1) 与 (U_1^+,φ_1^+) 相容，其余元素同理

$\Rightarrow$ $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2$

3.

(1°) 由例4 $D_1'=\{(U_1\ \varphi_1)\ (U_2\ \varphi_2)\}$ 确定了1维 C^∞ 流形

由例9 $D_2'=\{(U_1\times U_1,\varphi_1\times\varphi_1),(U_1\times U_2,\varphi_1\times\varphi_2),(U_2\times U_1,\varphi_2\times\varphi_1),(U_2\times U_2,\varphi_2\times\varphi_2)\}$

满足定义1中的条件 (1°)(2°) $\Rightarrow$ $S^1\times S^1$ 为 C^∞ 流形

(2°) $U_1=(S^1\setminus\{e^{i0}\})\times(S^1\setminus\{e^{i0}\})$ $\varphi_1:U_1\to\mathbb{R}^2$ $(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\to(\theta_1,\theta_2)$ $\theta_1\theta_2\in(0,2\pi)$

$U_2=(S^1\setminus\{e^{i\frac{\pi}{2}}\})\times(S^1\setminus\{e^{i\frac{\pi}{2}}\})$ $\varphi_2:U_2\to\mathbb{R}^2$ $(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\to(\theta_1,\theta_2)$ $\theta_1\theta_2\in(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$

$U_3=(S^1\setminus\{e^{i\pi}\})\times(S^1\setminus\{e^{i\pi}\})$ $\varphi_3:U_3\to\mathbb{R}^2$ $(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})\to(\theta_1,\theta_2)$ $\theta_1\theta_2\in(\pi,3\pi)$

可验证：$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}\in C^\infty$ 其余同理(略) $\Rightarrow S^1\times S^1$ 为 C^∞ 流形

(3°) 可以

取 $U_1=S^1\times(S^1\setminus\{e^{i0}\})$

$U_2=S^1\times(S^1\setminus\{e^{i\pi}\})$

若单连通 不可以

Brown 定理：n维紧流形可以被两个同胚于 R^n 坐标卡覆盖，则它是n维球面

$S^1\times S^1\neq S^2$

4. 证明n维实射影空间P^n为C^∞流形

证: $\mathbb{R}P^n$ 为$\mathbb{R}^n$中所有过原点的直线

$U_i = \{\overline{(x^1 \cdots x^n)} \mid x^i \neq 0\}$ $\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ $\overline{(x^1 \cdots x^n)} \mapsto (\frac{x^1}{x^i} \cdots \frac{x^i}{x^i} \cdots \frac{x^n}{x^i})$

φ_i良定义且连续 $\varphi_i^{-1}(y^1 \cdots y^{n-1}) = \overline{(y^1 x^i \cdots x^i \cdots y^{n-1} x^i)}$

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y^1 \cdots y^{n-1}) = \varphi_2(\overline{(1, y^1 \cdots y^{n-1})}) = (\frac{1}{y^2}, \frac{y^1}{y^2}, 1 \cdots \frac{y^{n-1}}{y^2}) \in C^\infty$

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ 同理

$\therefore$ $\mathbb{R}P^n$ 为C^∞流形

6. 流形: T2 A2局部欧 (Hausdorff)

$T_2 \Rightarrow T_1$ $A_2 \Rightarrow A_1$

8.

(1°) 由例6定义τ可知,包含$p.q$的开集有非空交集 $\Rightarrow$ M不是T_2的 ($\odot\!\odot \Rightarrow T_1$) ($\odot$ $\odot \Rightarrow T_2$)

(2°) 设τ的基为B B可数 $\exists C := \{a \cup A \mid a \in S^1\ A \notin S^1\} \in B \Rightarrow Q$可数 矛盾

(3°) $B = \{P \cup Q \mid Q = \{q\} \subset Q$ P以有理点为中心 有理数为半径 $\subset B^2\}$

B为(M, τ)的可数基 M为A_2空间

(4°) $\overline{\{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < r < 1\}} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le r\} \cup Q$

$p_n = (\frac{1}{n}, 0)$的极限点为Q

9. 光滑:

$f: C^n \to \mathbb{R}^n$

$(z^1 \cdots z^n) \mapsto (\mathrm{Re}z^1\ \mathrm{Im}z^1, \cdots \mathrm{Re}z^n, \mathrm{Im}z^n)$ f同胚

$(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{D} \Rightarrow (U_\alpha, f \circ \varphi_\alpha)$ 其中$f \circ \varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$

令 $\mathcal{D}' = \{(U_\alpha, f \circ \varphi_\alpha) \mid (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{D}\}$

$\forall (U_\alpha, f \circ \varphi_\alpha), (U_\beta, f \circ \varphi_\beta) \in \mathcal{D}'$ $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$

$(f \circ \varphi_\alpha) \circ (f \circ \varphi_\beta)^{-1} = f \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ f^{-1} \Rightarrow$ 流形

$\Rightarrow \mathcal{D}'$确定了M实流形

解析: C-R方程 $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$

复解析 $\supsetneq$ 实解析

柯西积分公式: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$

$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$ 在z_0邻域$\exists$

12. (1°) 令 $F = x\sqrt{1-|x|^2}$ 同(2°)

(2°) S^n: 设F为球极投影

T为R^n上平移变换: $Tx = x + f(q) - f(p)$

则 $F' = F^{-1} \circ T \circ F$ s.t. $F'(p) = q$

(3°) 设M为连通流形

令 $N = \{q \in M \mid \exists$ 同胚映射 $F: M \to M$ s.t. $F(p) = q\}$

$\because p \in N$。$\therefore N$非空

$\because B^n$为齐性空间

$\therefore N$既开又闭 由M连通 $\Rightarrow N = M \Rightarrow M$齐性空间

补4. A_2: RP_n: $S^n/\sim$

取S^n上一组可数基$\{p \cap S^n : p$以有理点为球心,有理数为半径$\} := B'$

B'可对应到B为RP_n可数基 $\Rightarrow A_2$

T_2: 设 $p \neq q \in R_n$ $A := \{m \in RP_n \mid d(m.p) < d(p.q)/3\}$ $B := \{n \in RP_n \mid d(n.q) < d(n.q)/3\}$

则$A.B$为邻域 $A \cap B = \varphi$